« Exercices pédagogiques d'économétrie
avec corrigés et rappels de cours »
Régis Bourbonnais, Economica, Janvier 2008

Errata

Page 7 : Table des matières
Exercice 5. Objectifs : La méthode …

Page 19

Question 2.

Soit à tester : H0 : $a_1 = 0{,}5$ contre l'hypothèse H1 : $a_1 \neq 0{,}5$.

Sous H0 ($a_1 = 0{,}5$) le ratio de Student $\dfrac{\hat{a}_1 - 0{,}5}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$ suit donc une loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. Le test d'hypothèses bilatéral consiste donc à comparer le ratio de Student empirique $t^* = \dfrac{\hat{a}_1 - 0{,}5}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \dfrac{0{,}572 - 0{,}5}{0{,}226} = 0{,}32$ à la valeur du t de Student lue dans la table à 12 – 2 = 10 degrés de liberté et pour un seuil de probabilité égal à 5%, soit $t_{10}^{0,05} = 2{,}228$.

Puisque le $t^* = 0{,}32 < t_{10}^{0,05} = 2{,}228$, nous ne sommes pas en mesure de rejeter l'hypothèse H0, le coefficient a_1 n'est donc pas significativement différent de 0,5.

La probabilité critique (risque de rejeter à tort l'hypothèse H0) est donnée par la valeur de la probabilité α^c telle que : $t_{10}^{\alpha^c} = 0{,}32$, soit après la lecture sur une table de Student à 10 degrés de liberté pour un test bilatéral ou par l'utilisation de la fonction Excel « LOI.STUDENT » $\alpha^c = 0{,}76$. Nous avons 76% de risque de nous tromper en rejetant l'hypothèse H0, donc nous l'acceptons puisque le risque de se tromper est supérieur à 5%.

Le graphique 2 illustre ce test d'hypothèses bilatéral.

Page 29 : (dernière ligne)

$$t^* = \frac{\left|\hat{a}_1^G - \hat{a}_1^F - 0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1^G - \hat{a}_1^F}} = \frac{\left|0{,}81 - 1{,}09\right|}{\sqrt{0{,}261}} = 0{,}55 < t_{54+43-4}^{0,05} = t_{\infty}^{0,05} = 1{,}96\,.$$

Page 42

Corrigé de l'exercice 4

Soit le modèle [1] : $y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \varepsilon_t$

On estime les coefficients du modèle [2] : $x_{1t} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2\, x_{2t} + e_t$

Soit $e_t = x_{1t} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2\, x_{2t}$

Le modèle [3] peut donc se réécrire en fonction de $x_{1,t}$ et $x_{2,t}$ sous la forme :

$y_t = c_0 + c_1 (x_{1t} - \hat{b}_1 - \hat{b}_2\, x_{2t}) + c_2 x_{2t} + \varepsilon_t$

ou encore en rassemblant les termes en $x_{1,t}$ et $x_{2,t}$

$y_t = (c_0 - c_1 \times \hat{b}_1) + c_1 x_{1t} + (c_2 - c_1 \times \hat{b}_2)\, x_{2t} + \varepsilon_t$

Par identification avec l'équation [1], nous avons donc :

$\hat{a}_0 = \hat{c}_0 - \hat{c}_1 \times \hat{b}_1$

$\hat{a}_1 = \hat{c}_1$

$\hat{a}_2 = \hat{c}_2 - \hat{c}_1 \times \hat{b}_2$

Dans un modèle économétrique, nous pouvons donc remplacer une variable explicative par une combinaison linéaire d'elle-même et des autres variables explicatives.

Pages 49 à 51

Corrigé de l'exercice 6

Question 1.

L'estimateur est donné par :

$\hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{pmatrix} 17{,}2 & 17{,}4 \\ 17{,}4 & 22{,}8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2{,}22 \\ -2{,}14 \end{pmatrix}$ (sur données centrées).

$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0{,}255 & -0{,}1946 \\ -0{,}1946 & 0{,}1924 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2{,}22 \\ -2{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}15 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$

Le terme constant est égal à : $\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} - \hat{a}_2 \bar{z}$ = 4,06 + 0,15 × 30,4 – 0,02 × 16,8 = 8,28.

Le modèle estimé s'écrit : y_t = 8,28 – 0,15 × x_t + 0,02 × z_t + e_t

Question 2.

Sur les données centrées nous avons :

R^2=

$$= \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{(X\hat{a})'X\hat{a}}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = \frac{\hat{a}'X'X\left[(X'X)^{-1}X'Y\right]}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = \frac{\hat{a}'X'Y}{n \times \sigma_y^2} = \frac{\begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}02 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2{,}22 \\ -2{,}14 \end{pmatrix}}{5 \times 0{,}0584} = 0{,}993 \text{ car}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{n} = 0{,}0584 .$$

L'hypothèse à tester est : H0 : $a_1 = a_2 = 0$.

Soit à calculer $F^* = \dfrac{R^2 / k}{(1 - R^2)/(n - k - 1)} = \dfrac{0{,}993/2}{(1 - 0{,}993)/(5 - 3)}$ = 165,67 > $F_{2;2}^{0{,}05} \approx 19$, nous rejetons H0, la régression est globalement significative.

Question 3.

Nous avons la relation $R^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \dfrac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \dfrac{SCR}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \dfrac{SCR}{n \times \sigma_y^2}$

D'où : $SCR = n \times \sigma_y^2 \times (1 - R^2) = 0{,}001752$.

La variance résiduelle est donnée par : $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = SCR / (n - 3) = 0{,}000876$

Nous en déduisons la matrice des variances-covariances des coefficients :

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} = 0{,}000876 \times \begin{pmatrix} 17{,}2 & 17{,}4 \\ 17{,}4 & 22{,}8 \end{pmatrix}^{-1} = 0{,}000876 \times \begin{pmatrix} 0{,}255 & -0{,}1946 \\ -0{,}1946 & 0{,}1924 \end{pmatrix}$$

Soit : $\mathrm{Var}(\hat{a}_1) = 0{,}000876 \times 0{,}255 = 0{,}00022$; $\mathrm{Var}(\hat{a}_2) = 0{,}000876 \times 0{,}1924 = 0{,}0001685$

$t^*_{\hat{a}1} = \dfrac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \dfrac{|-0{,}15|}{\sqrt{0{,}00022}} = 10 > t_2^{0,05} \approx 4{,}30$, rejet de H0, le coefficient a_1 est significativement différent de 0, la variable x (prix du vin) est explicative de la consommation de vin.

$t^*_{\hat{a}2} = \dfrac{\hat{a}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}} = \dfrac{|-0{,}02|}{\sqrt{0{,}0001685}} = 1{,}551 < t_2^{0,05} \approx 4{,}30$, acceptation de H0, le coefficient a_2 n'est pas significativement différent de 0, la variable z (prix de la bière) n'est pas explicative de la consommation de vin.

Question 4.

Soit l'hypothèse jointe H0 : $\begin{bmatrix} a_1 = -0{,}1 \\ a_2 = 0 \end{bmatrix}$

Qu'est-ce qu'un test d'hypothèses jointes ? Un test d'hypothèses jointes consiste à tester qu'un sous-ensemble de coefficients n'est pas significativement différent d'un ensemble de valeurs fixées. Dans notre exemple, nous sommes conduits à rejeter l'hypothèse H0 dans trois cas : $a_1 \neq -0{,}1$ et $a_2 = 0$; $a_1 = -0{,}1$ et $a_2 \neq 0$; $a_1 \neq -0{,}1$ et $a_2 \neq 0$.

Nous savons que[1] : $\dfrac{1}{q}(\hat{a}_q - a_q)\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}qq}(\hat{a}_q - a_q)'$ suit une loi de Fisher à q et $n - k - 1$ degrés de liberté.

Avec $\hat{\Omega}_{\hat{a}qq} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} \rightarrow \hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}qq} = \dfrac{1}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}(X'X) = \dfrac{1}{0{,}001655}\begin{pmatrix} 17{,}2 & 17{,}4 \\ 17{,}4 & 22{,}8 \end{pmatrix}$.

Or sous l'hypothèse H0 : $(\hat{a}_q - a_q)' = \begin{bmatrix} -0{,}15 \quad + \quad 0{,}1 \\ 0{,}02 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{bmatrix}$

Soit à calculer la statistique du Fisher empirique : $F^* = \dfrac{1}{q}(\hat{a}_q - a_q)\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}qq}(\hat{a}_q - a_q)'$

$$F^* = \frac{1}{2}(-0{,}05 \quad 0{,}02)\left[\frac{1}{0{,}000876}\begin{pmatrix} 17{,}2 & 17{,}4 \\ 17{,}4 & 22{,}8 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$$

$F^* = \dfrac{1}{2 \times 0{,}000876}(-0{,}05 \quad 0{,}02)\begin{pmatrix} 17{,}2 & 17{,}4 \\ 17{,}4 & 22{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}05 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} = 9{,}88 < F_{2;2}^{0,05} = 19$, nous acceptons l'hypothèse H0.

Question 5.

[1] *Cf.* Annexe I au chapitre 2.

Il n'existe pas de relation significative entre la consommation de vin ordinaire et le prix de la bière (les biens ne sont pas substituables). En revanche, il existe une relation significative entre la consommation de vin ordinaire et son prix (et donc la taxe sur les alcools).

Pour diminuer la consommation de vin, il faut donc seulement augmenter la taxe sur les vins.

Page 58 : (Question 3.)

$t^* = \dfrac{34 - 3 \times -4}{\sqrt{45{,}91}}$ = 6,79 > $t_{\infty}^{0,05} = 1{,}96$, donc nous refusons l'hypothèse H0.

Page 59 :

$$\hat{\sigma}_{e51}^{2} = 0{,}85 \times \left[1 + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0{,}85\ (1 + 61{,}86) = 53{,}49$$

L'intervalle de prévision est donné par : $y_{n+h} = \hat{y}_{n+h} \pm t_{n-k-1}^{\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{e_{n+h}}$ avec $t_{n-k-1}^{\alpha/2}$ valeur de la loi de Student à un seuil α et $n - k - 1$ degrés de liberté.

Soit pour un seuil à 95% :

$y_{51} = -2 \pm 1{,}96 \times \sqrt{53{,}49} \rightarrow y_{51} \in$ [–16,33 ; 12,33].

Page 83 : Tableau 5, colonne 3 : $(e_t - e_{t-1})^2$

Page 175

Exercice 1 – Objectifs : expliquer le concept de cointégration avec une tendance déterministe.

Soit deux variables affectées d'une tendance déterministe quadratique :

$y_{1t} = 8 + 3\,t - 4\,t^2 + \varepsilon_{1t}$ [1]

$y_{2t} = -5 + 3\,t^2 + \varepsilon_{2t}$ [2]

Corrigé de l'exercice 1

Question 1.

Soit à calculer : $\begin{pmatrix} y_{1t} & y_{1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1\, y_{1t} + \alpha_2\, y_{2t}$

L'ordre d'intégration de y_{1t} et y_{2t} est $d = 2$, on dit que les variables sont $I(2)$.

Posons $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 4$

$\alpha_1\, y_{1t} = 3 \times (8 + 3\,t - 4\,t^2 + \varepsilon_{1t}) = 24 + 9\,t - 12\,t^2 + 3\,\varepsilon_{1t}$

$\alpha_2\, y_{2t} = 4 \times (-5 + 3\,t^2 + \varepsilon_{2t}) = -20 + 12\,t^2 + 4\,\varepsilon_{2t}$

D'où $z_t = \alpha_1\, y_{1t} + \alpha_2\, y_{2t} = (24 + 9\, t - 12\, t^2 + 3\, \varepsilon_{1t}) + (-20 + 12\, t^2 + 4\, \varepsilon_{2t}) = 4 + 9\, t + 3\, \varepsilon_{1t} + 4\, \varepsilon_{2t}$

Page 179 : dernière colonne il s'agit de la variable CAC en différence au lieu de DJ en différence

Page 186 :

Soit à tester l'hypothèse H_0^2 : $c = 0$, or $t_{\hat{c}} = 1{,}81 < t_{tabulé}^{0,05} = 2{,}52 \rightarrow$ nous acceptons l'hypothèse H_0^2, $c = 0$. Nous allons donc sur la branche de droite.

Page 188 :

Soit à tester l'hypothèse H_0^2 : $c = 0$, or $t_{\hat{c}} = 1{,}88 < t_{tabulé}^{0,05} = 2{,}52 \rightarrow$ nous acceptons l'hypothèse H_0^2, $c = 0$. Nous allons donc sur la branche de droite.